# 用地表、低空重力资料解三类大地测量边值问题*

边少锋[1] 骆鸣津[2] 高金耀[3] 张赤军[4]

1. 海军工程大学四系，武汉 430033；2. 河南省地震局，郑州 450008；
3. 国家海洋局第二海洋研究所，杭州 310012；4. 中国科学院测量与地球物理研究所，武汉 430077

**摘要** 根据虚拟球理论和球函数延拓法推导了大地测量Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ3类边值问题的相应公式. 如此既充分利用了地面及低空重力场的元素，且使边值问题的求解比其他方法简便. 本方法不同于现今广为应用的Molodensky理论和解法，也有异于Bjerhammar方法和步骤.

**关键词** 扰动位 扰动重力 球函数 解析延拓 边值问题

1849年Stokes首先开展了大地水准面形状的研究[1]，该理论是根据位理论和大地水准面上的重力异常求解面上及外空的扰动位. 约一百年后，为满足大地水准面之外不存在质量，Molodensky[2]引入了似地球表面与似大地水准面的概念，并利用地面上的重力异常求解了地面上及外空扰动位，从而可以研究地球表面的真实形状[1,2]. 为避免解Molodensky问题中一些困难，20世纪60年代，Bjerhammar[3]及骆鸣津[4]提出了将地面重力资料解析延拓到地球内部的球面上的方法，通过这样的延拓，可将复杂地球表面上的大地测量边值问题转换为一个简单球面为边界的边值问题，这可从球外调和正则函数的性质加以证明.

Krarup于1969年，也从数学中的Runge定理对上述问题作了严格的证明[5]. 许厚泽、朱灼文于1984年作了如下证明，即由地球面上的高程异常与重力异常组合而成的单层位亦可延拓到虚拟球面上[6]. 在20世纪70年代卫星测高和GPS及其后一系列新的空间技术出现之后，大地测量中的第三边值问题求解已经扩展到第一和第二边值问题的求解. 以往已有许多作者对上述问题作了研究，近年来的研究更多. 例如，Moritz、李斐等求解了GPS重力边值问题[7,8]，针对卫星重力梯度，吴晓平提出最佳积分核的谱组合解[9]，Peterovskaya构建了全张量梯度的边值问题[10]，Gelderen等给出由全张量梯度求解扰动位的积分公式[11]，Martinee提出解球面梯度边值问题的Green函数方法[12]，张传定提出卫星重力数据向下延拓的矢量和张量的配置解[1)]，骆鸣津等也研究了用球函数延拓低空重力场的问题[13]，罗志才等研究了卫星重力下延的谱方法[14]，Rummer研究了地球引力位及其一、二阶导数的球谱特性[15]，李建成推导了由扰动位的二阶导数计算扰动重力的公式[16]，边少峰等用样条函数研究了超定边值问题[17].

许厚泽和李建成等分别将上述有关边值理论用于中国的实际[18,19].

边少锋、于锦海、王兴涛等研究了关于卫星测高的边值问题和解法[20,21]，航空重力数据下延问题[22]，申文彬等提出了对虚拟球上引位的压缩恢复法的问题[23]，邓波等研究了用Poission积分表示第一类边值问题[24]. 于锦海对各类边值问题作了详细的阐述与论证[2)]，与上述不同的是：本文以球函数

2005-11-24 收稿，2006-01-04 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号：40125013)

E-mail：sfbian@sina.com

1) 张传定. 卫星大地测量一基础模型化方法与数据处理方法. 解放军测绘学院博士论文，2000

2) 于锦海. 物理大地测量边值问题的理论. 中国科学院测量与地球物理研究所博士论文. 武汉，1992

为工具，运用扰动位 $T$，$\rho\Delta g$，$\rho\delta g$ 及 $\rho^2\partial\delta g/\partial r$ 的空间球调和函数特性，分别对第一、第二、第三边值问题的解法作了研究与讨论.

## 1 基本假设与理论背景

（1）为便于讨论地球重力场的问题，本文将地球正常水准椭球面以半径为 $\rho_0$ 的球面来代替，至于如何将球面上扰动重力位及其派生量置换到椭球面上，这里暂不讨论，因为前人已作了不少研究[25,26].

（2）设半径 $\rho_0$ 的球面外无质量，球外扰动位 $T(\rho, \theta, \lambda)$ 为调和正则函数，则由球面上的 $T(\rho_0, \theta, \lambda)$ 可以惟一确定地球表面上的 $T(\rho_N, \theta, \lambda)$，$\partial/\partial\rho T(\rho_0, \theta, \lambda)$. 其中 $\rho_0$，$\theta$，$\lambda$ 分别为地球表面的向径、纬度和经度，$\rho$ 为地心到外空点的向径. 1964年 Bjerhammar[3] 已经提出了可将 Molodensky 边值问题等价地转换为一个简单的虚拟球面边值问题的理论. 1965年在骆鸣津[4]的“用球函数法解算重力测量的基本微分方程”中已经证明了在保持吸引体外扰动位 $T(\rho, \theta, \lambda)$ 不变的情况下，可解析延拓到以 $\rho_0$ 为半径的球面上，此球即为虚拟球，可将它用于低空重力场的延拓. 1969年 Krarup[5] 将数学中著名的 Runge 定理作了成功的推广和应用，他严格地证明了大地测量边值问题解析延拓解的存在性和等价性. 对于大地测量，Runge 定理表述为在地球外部任一正则谐函数 $\varphi$，可用地球内部任意给定的一个球而在其外为正则谐函数的 $\psi$ 来一致逼近，此时，对任意给定的 $\varepsilon>0$，在任何完全包围地球表面的封闭曲面上处处有 $|\varphi-\psi|<\varepsilon$. 此定理又称 Runge-Krarup 定理. 如果地球表面是充分正则的，例如处处连续可微，则上述定理又可进一步表述为任何一个在地球外部调和且在其外部和面上连续的函数 $\varphi$，可用地球内部任意给定的一个球面其外为正则谐函数 $\psi$ 来一致逼近，此时，对任意给定的 $\varepsilon>0$，则在地球表面及其外部处处有 $|\varphi-\psi|<\varepsilon$. 文献[19]亦称此定理为 Keldysh-Lavrentiev 定理.

（3）若地球表面的边界形状为已知，则

（i）采用全球卫星定位系统 GPS 能测定正常水准椭球面到测点的高程 $H^G$；

（ii）在地表作水准及重力测量，可算出正常高 $H^\gamma$，且

$$H^\gamma = \frac{1}{\gamma_m}\int_0^A g\mathrm{d}h, \tag{1}$$

$\gamma_m$ 为 $A$ 点下面正常位水准面到 $A$ 点之间正常重力的平均值，用 $H^\gamma$ 构成的面称近似地球面. 由于假定用球面代替椭球面，地面点的向径 $\rho_N$ 为

$$\rho_N = \rho_N(\theta,\lambda) = \rho_0 + H(\theta,\lambda), \tag{2}$$

解算时 $H(\theta, \lambda)$ 既可代表大地高 $H^G$，亦可代表正常高 $H^\gamma$.

## 2 边值问题中的边界(值)条件

在地球表面上能进行水准测量、重力测量、GPS 测量，能测量地表 $A$ 点相对于水准原点 $O$（如青岛验潮站水准原点）的位差.

$$W(A) - W(O) = \int_0^A g\mathrm{d}h. \tag{3}$$

由 GPS 测 $A$ 点、$O$ 点的 $H^\gamma$，可算出 $U(A)$ 和 $U(O)$ 相对于正常位水准面上的 $\bar{U}$ 的位差，在构建正常位水准面时，令 $\bar{U}=\bar{W}$，$\bar{W}$ 为大地水准面上的位，如果能求出水准原点 $O$ 点的 $W(O)$ 与 $\bar{W}$ 的差，就可算出地面 $A(\rho_N, \theta, \lambda)$ 点上的扰动位 $T(\rho_N, \theta, \lambda)$，则边值问题表示如下：

$$\left.\begin{aligned} &\Delta T(\rho,\theta,\lambda) = 0, && \text{在地面外} \\ &T(A) = T(\rho_N,\theta,\lambda) && \\ &\qquad = W(A) - U(A), && \text{在地面上} \\ &T(\rho,\theta,\lambda) \to 0. && \text{当 } \rho\to\infty \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

（4）式中在地面上的值为已知，$\Delta$ 为 Laplace 算子，此即第一边值条件，由于 $H^G$ 为已知，则 $A(\rho_N, \theta, \lambda)$ 上的正常重力可以算出，且有：

$$\left.\begin{aligned} &\Delta T(\rho,\theta,\lambda) = 0, && \text{在地面外} \\ &\frac{\partial}{\partial\rho}T(A) = -g(A) - r(A) && \\ &\qquad = f_1(\rho_N,\theta,\lambda), && \text{在地面上} \\ &T(\rho,\theta,\lambda) \to 0. && \text{当 } \rho\to\infty \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

上式中的第二项即为第二边值条件，$f_1(\rho_N, \theta, \lambda)=$

$\delta g$ 为纯力重力异或扰动重力，由于 $H^{\gamma}$ 可算出，则似地球面上 $B$ 点的正常重力 $\gamma(B)$ 也可算出，由于

$$\frac{\partial}{\partial\rho}T(A)=-[g(A)-\gamma(A)]$$
$$=-\left[g(A)-\left(\gamma(B)+N\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}\right)\right]$$

则有：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta T(\rho,\theta,\lambda)=0, && \text{在地面外}\\ &\left[\frac{2T}{\rho}+\frac{\partial}{\partial\rho}T\right]_{\rho=\rho_N}=-[g(A)-\gamma(B)] && \\ &\qquad=f_2(\rho_N,\theta,\lambda), && \text{在地面上}\\ &T(\rho,\theta,\lambda)\to 0. && \rho\to\infty\end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

上式中的第二项为第三边值条件或混合边界条件，该值为混合重力异常：$f_2(\rho_N,\ \theta,\ \lambda)=\Delta g(\rho,\ \theta,\ \lambda)$，今令 $\eta_1(\rho,\ \theta,\ \lambda)$ 为扰动重力的垂直梯度，$\eta_2(\rho,\ \theta,\ \lambda)$ 为混合重力异常垂直梯度，有：

$$\eta_1(\rho,\theta,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\rho}f_1(\rho,\theta,\lambda)=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}T(\rho,\theta,\lambda), \tag{7}$$

$$\eta_2(\rho,\theta,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\rho}f_2(\rho,\theta,\lambda). \tag{8}$$

## 3 球调和函数的表达式

设 $V(\rho,\ \theta,\ \lambda)$ 为半径 $\rho_0$ 球面外空间点 $(\rho,\ \theta,\ \lambda)$ 上的调和函数，它与球面上之值 $V(\rho_0,\ \theta,\ \lambda)$ 的关系为

$$V(\rho,\theta,\lambda)=\sum\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+1}V_n(\rho_0,\theta,\lambda), \tag{9}$$

$$V_n(\rho_0,\theta,\lambda)=\frac{2n+1}{4\pi}\times\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}V(\rho_0,\theta',\lambda')\cdot P_n(\cos\psi)\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\lambda', \tag{10}$$

$$P_n(\cos\psi)=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\cdot\cos(\lambda-\lambda')P_n^k(\theta)P_n^k(\theta'), \tag{11}$$

式中，$T(\rho,\ \theta,\ \lambda)$，$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}T(\rho,\ \theta,\ \lambda)$，$\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}T(\rho,\ \theta,\ \lambda)$ 都是球面外空间点 $(\rho,\ \theta,\ \lambda)$ 上的调和函数，都可按(9)式建立关系. $\rho_0(\theta',\ \lambda')$ 为流动单元的球半径，$\psi$ 为计算点与流动元之间的球面角距，$p_n^k$ 为 Legendre 缔合多项式，则有：

$$T(\rho,\theta,\lambda)=\sum\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+1}T_n(\rho_0,\theta,\lambda), \tag{12}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}T(\rho,\theta,\lambda)=pf_1(\rho,\theta,\lambda)=\sum-(n+1)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+1}T_n(\rho_0,\theta,\lambda), \tag{13}$$

$$f_1(\rho,\theta,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\rho}T(\rho,\theta,\lambda)=\sum-\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+2}(n+1)\frac{1}{\rho_0}T_n(\rho_0,\theta,\lambda)=\sum\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+2}f_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda). \tag{14}$$

$$\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}T(\rho,\theta,\lambda)=\rho^2\eta_1(\rho,\theta,\lambda)=\sum(n+1)(n+2)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+1}\cdot T_n(\rho_0,\theta,\lambda). \tag{15}$$

$$\eta_1(\rho,\theta,\lambda)=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}T(\rho,\theta,\lambda)=\sum\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+3}\eta_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda). \tag{16}$$

由(7)，(13)式又可得

$$\eta_1(\rho,\theta,\lambda)=\sum(n+1)(n+2)\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+3}T_n(\rho_0,\theta,\lambda). \tag{17}$$

今令 $\xi(\rho,\ \theta,\ \lambda)=\frac{\partial}{\partial\rho}\eta_1(\rho,\ \theta,\ \lambda)$，并将 $\rho^3\xi_1(\rho,\ \theta,\ \lambda)$ 代入(9)式，则

$$\xi_1(\rho,\theta,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\rho}\eta_1(\rho,\theta,\lambda)=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}f_1(\rho,\theta,\lambda)=\frac{\partial^3}{\partial\rho^3}T(\rho,\theta,\lambda)=\sum-(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\frac{1}{\rho_0^3}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+4}T_n(\rho_0,\theta,\lambda). \tag{18}$$

比较各式右端，得

$$f_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=-(n+1)\frac{1}{\rho_0}T_n(\rho_0,\theta,\lambda), \quad (19)$$

$$\eta_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=-(n+2)\frac{1}{\rho_0}f_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=(n+1)(n+2)\frac{1}{\rho_0^2}T_n(\rho_0,\theta,\lambda), \quad (20)$$

$$\xi_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=-(n+3)\frac{1}{\rho_0}\eta_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=(n+2)(n+3)\frac{1}{\rho_0^2}f_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=-(n+1)(n+2)(n+3)\frac{1}{\rho_0^3}\cdot T_n(\rho_0,\theta,\lambda). \quad (21)$$

用前面相同的方法，处理混合重力异常(地表$A$点的重值$g_A$与其相应于似地球表面上$B$点的正常重力值之差)及其导数的关系，且

$$\frac{2}{\rho}T(\rho,\theta,\lambda)+\frac{\partial}{\partial\rho}T(\rho,\theta,\lambda)=-[g(A)-\gamma(B)]=f_2(\rho,\theta,\lambda), \quad (22)$$

$$f_2(\rho,\theta,\lambda)=\sum\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+2}f_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=\sum-(n-1)\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+2}\cdot T_n(\rho_0,\theta,\lambda), \quad (23)$$

$$\eta_2(\rho,\theta,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\rho}f_2(\rho,\theta,\lambda)=\sum\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+3}\eta_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=\sum(n-1)(n+2)\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+3}\cdot T_n(\rho_0,\theta,\lambda), \quad (24)$$

$$\xi_2(\rho,\theta,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\rho}\eta_2(\rho,\theta,\lambda)=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}f_2(\rho,\theta,\lambda)=\frac{\partial^3}{\partial\rho^3}T(\rho,\theta,\lambda)=\sum-(n-1)(n+2)(n+3)\cdot\frac{1}{\rho_0^3}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^4T_n(\rho_0,\theta,\lambda). \quad (25)$$

比较各式右端，得

$$f_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=-(n-1)\frac{1}{\rho_0}T_n(\rho_0,\theta,\lambda), \quad (26)$$

$$\eta_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=-(n+2)\frac{1}{\rho_0}f_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=(n-1)(n+2)\frac{1}{\rho_0^2}T_n(\rho_0,\theta,\lambda), \quad (27)$$

$$\xi_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=-(n+3)\frac{1}{\rho_0}\eta_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=(n+2)(n+3)\frac{1}{\rho_0^2}f_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=-(n-1)(n+2)(n+3)\frac{1}{\rho_0^3}T_n(\rho_0,\theta,\lambda). \quad (28)$$

## 4 第一边值问题

对于球外空间点($\rho$, $\theta$, $\lambda$)上的调和函数$T(\rho,\theta,\lambda)$, $\rho f_1(\rho,\theta,\lambda)$, $\rho^2\eta_1(\rho,\theta,\lambda)$都可按(9)式的形式与球面扰动位$T(\rho_0,\theta,\lambda)$建立关系. 亦即航空、卫星测量的数都可解析延展到球面或地面. 在此重点是讨论地球表面点($\rho_N$, $\theta$, $\lambda$)上的调和函数与$T(\rho_0,\theta,\lambda)$之间的关系. 由于$\rho_N=\rho_N(\theta,\lambda)=\rho_0+H(\theta,\lambda)$是$\theta$, $\lambda$的函数，则地面测得或算得的$T(\rho_N,\theta,\lambda)$, $f_1(\rho_N,\theta,\lambda)$, $\eta_1(\rho_N,\theta,\lambda)$, $f_2(\rho_N,\theta,\lambda)$, $\eta_2(\rho_N,\theta,\lambda)$也是$\theta$, $\lambda$的函数，我们都可用(9)式展为球面函数，

$$T(\rho_N,\theta,\lambda)=\sum T_n(\rho_N,\theta,\lambda)=\sum\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}T(\rho_N,\theta',\lambda')\cdot P_n(\cos\psi)\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\lambda', \quad (29)$$

$$f(\rho_N,\theta,\lambda)=\sum f_n(\rho_N,\theta,\lambda)=\sum\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\rho_N,\theta',\lambda')\cdot P_n(\cos\psi)\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\lambda', \quad (30)$$

$$\eta(\rho_N,\theta,\lambda)=\sum\eta_n(\rho_N,\theta,\lambda)=\sum\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\eta(\rho_N,\theta',\lambda')\cdot P_n(\cos\psi)\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\lambda', \quad (31)$$

式中 $f(\rho_N, \theta, \lambda)$、$\eta(\rho_N, \theta, \lambda)$既可表示扰动重力及其垂直梯度，也可表示混合重力异常及其垂直梯度，在(12)式中令 $\rho=\rho_N$，则

$$T(\rho_N,\theta,\lambda)=\sum T_n(\rho_N,\theta,\lambda)=\sum\left(\frac{\rho_0}{\rho_N}\right)^{n+1}T_n(\rho_N,\theta,\lambda),\qquad(32)$$

$$T(\rho_0,\theta,\lambda)=\sum T_n(\rho_0,\theta,\lambda)=\sum\left(\frac{\rho_N}{\rho_0}\right)^{n+1}T_n(\rho_0,\theta,\lambda)=\sum\left[1+(n+1)\frac{1}{\rho_0}(\rho_N-\rho_0)+\frac{1}{2}n(n+1)\frac{1}{\rho_0^2}(\rho_N-\rho_0)^2+\cdots\right]\cdot T_n(\rho_N,\theta,\lambda).\qquad(33)$$

将(13)—(16)式化简后有

$$T(\rho_0,\theta,\lambda)=\sum T_n(\rho_0,\theta,\lambda)=T(\rho_N,\theta,\lambda)-\frac{1}{\rho_0}\rho_N(\rho_N-\rho_0)\cdot f_1(\rho_N,\theta,\lambda)+\frac{1}{2\rho_0^2}(\rho_N-\rho_0)^2\cdot[\rho_N^2\eta_1(\rho_N,\theta,\lambda)+2\rho_N f_1(\rho_N,\theta,\lambda)].\qquad(34)$$

$$T_n(\rho_0,\theta,\lambda)=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big\{T(\rho_N,\theta',\lambda')-\frac{1}{\rho_0}\rho_N(\theta',\lambda')[\rho_N(\theta',\lambda')-\rho_0]\cdot f_1(\rho_N,\theta',\lambda')+\Big\{\frac{1}{2\rho_0^2}[\rho_N(\theta',\lambda')-\rho_0]^2\cdot[\rho_N^2(\theta',\lambda')\eta_1(\rho_N,\theta',\lambda')+2\rho_N(\theta',\lambda')\cdot f_1(\rho_N,\theta',\lambda')\Big\}\times P_n(\cos\psi)\sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda'.\qquad(35)$$

设地球表面之外的空间点($\rho_R$, $\theta$, $\lambda$)的扰动位为 $T(\rho_R, \theta, \lambda)$，则

$$T(\rho_R,\theta,\lambda)=\sum\left(\frac{\rho_0}{\rho_R}\right)^{n+1}T_n(\rho_0,\theta,\lambda)=\frac{1}{4\pi\rho_0^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}T(\rho_0,\theta',\lambda')M(\rho_R,\psi)\cdot\rho_0^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda',\qquad(36)$$

$$M(\rho_R,\psi)=\sum\left(\frac{\rho_0}{\rho_R}\right)^{n+1}(2n+1)P_n(\cos\psi).\qquad(37)$$

因

$$\frac{1}{r}=\sum\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho_R}\right)^{n+1}P_n(\cos\psi),\qquad(38)$$

式中 $r$ 为点($\rho_R$, $\theta$, $\lambda$)到点($\rho_0$, $\theta'$, $\lambda'$)的直线距离，由(37)，(38)式可得

$$M(\rho_R,\psi)=-2\rho_0\rho_R\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r}\right)-\rho_0\frac{1}{r}.\qquad(39)$$

将(34)，(35)式代入(36)，(37)式中即得解. 不过本方法不仅需要测得地球表面的扰动位 $T(\rho_N$, $\theta$, $\lambda)$，还需测得纯重力异常 $f_1(\rho_N$, $\theta$, $\lambda)$及其梯度 $\eta_1(\rho_N$, $\theta$, $\lambda)$，后者可由文献(27)求得，亦可由详细的地形数据求得[27].

## 5 第二边值问题

当(14)式中 $\rho=\rho_N$，有

$$f_1(\rho_N,\theta,\lambda)=\sum f_{1,n}(\rho_N,\theta,\lambda)=\left[\frac{\partial T(\rho,\theta,\lambda)}{\partial\rho}\right]_{\rho=\rho_N}=\sum\left(\frac{\rho_0}{\rho_N}\right)^{n+2}T_n(\rho_0,\theta,\lambda),\qquad(40)$$

$$f_1(\rho_0,\theta,\lambda)=\sum f(\rho_0,\theta,\lambda)=\sum\left(\frac{\rho_N}{\rho_0}\right)^{n+2}f_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=\left[1+(n+2)\frac{1}{\rho_0}(\rho_N-\rho_0)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\frac{1}{\rho_0^2}(\rho_N-\rho_0)^2+\cdots\right]\cdot f_{1,n}(\rho_N,\theta,\lambda),\qquad(41)$$

且有

$$-\frac{1}{\rho_0}\rho_N(\theta,\lambda)[\rho_N(\theta,\lambda)-\rho_0]\eta_1(\rho_N,\theta,\lambda)=\sum(n+2)\frac{1}{\rho_0}[\rho_N(\theta,\lambda)-\rho_0]\cdot\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(\theta,\lambda)}\right)^{n+2}f_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda),\qquad(42)$$

$$\frac{1}{2\rho_0^2}[\rho_N-\rho_0]^2\rho_N^2\xi_1(\rho_N,\theta,\lambda)+\frac{1}{\rho_0^2}[\rho_N-\rho_0]^2\rho_N\eta_1(\rho_N,\theta,\lambda)=$$

$$\sum \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\cdot$$
$$\frac{1}{\rho_0^2}(\rho_N - p_0)\left(\frac{\rho_0}{\rho_N}\right)^{n+2} f_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda). \tag{43}$$

则

$$f_1(\rho_0,\theta,\lambda) = \sum f_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda) = f_1(\rho_N,\theta,\lambda) - \frac{1}{\rho_0}[\rho_N - \rho_0]\rho_N\eta_1(\rho_N,\theta,\lambda) + \frac{1}{2\rho_0^2}(\rho_N-\rho_0)^2[\rho_N^2\xi_1(\rho_N,\theta,\lambda) + 2\rho_N\eta_1(\rho_N,\theta,\lambda)]. \tag{44}$$

式中

$$f_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{f_1(\rho_N,\theta',\lambda') - \frac{1}{\rho_0}(\rho_N-\rho_0)\rho_N\eta_1(\rho_N,\theta',\lambda') + \frac{1}{2\rho_0^2}(\rho_N-\rho_0)^2[\rho_N^2\xi_1(\rho_N,\theta',\lambda') + [2\rho_N\eta_1(\rho_N,\theta',\lambda')]\}P_n(\cos\psi)\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\lambda'. \tag{45}$$

关于地球表面上与外空间点($\rho_R$, $\theta$, $\lambda$) 的扰动位之间的关系，由(19)式有

$$T_n(\rho_0,\theta,\lambda) = -\frac{\rho_0}{n+1}f_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda). \tag{46}$$

而

$$T(\rho_R,\theta,\lambda) = \sum\left(\frac{\rho_0}{\rho_R}\right)^{n+1}T_n(\rho_0,\theta,\lambda) = \sum -\frac{\rho_0}{n+1}\left(\frac{\rho_0}{\rho_R}\right)^{n+1}f_{1,n}(\rho_0,\theta,\lambda) = \frac{1}{4\pi\rho_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f_1(\rho_0,\theta',\lambda')N(\rho_R,\psi)\rho_0^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\lambda', \tag{47}$$

式中

$$N(\rho_R,\psi) = \sum -\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{\rho_0}{\rho_R}\right)^{n+1}P_n(\cos\psi), \tag{48}$$

由(38)式得

$$N(\rho_R,\psi) = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\rho\int\frac{1}{r}\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho + \int\frac{1}{r}\frac{1}{\rho\mathrm{d}\rho}\right). \tag{49}$$

将(45)，(46)式代人(47)，(48)式中，可由 $\rho_0$ 球上的 $f_1(\rho_0, \theta, \lambda)$ 值求出 $T(\rho_R, \theta, \lambda)$，而 $f_1(\rho_0, \theta, \lambda)$，$f_n(\rho_0, \theta, \lambda)$ 是由地球表面测得的纯重力异常 $f_1(\rho_N, \theta, \lambda)$ 及其梯度 $\eta_1(\rho_N, \theta, \lambda)$ 求出的. 至于 $\xi(\rho_N, \theta, \lambda)$ 一般不能由直接观测得到，但可用高阶重力场模型计算得到，不过用球面代替椭球面的简化模型也不需要 $\xi(\rho_N, \theta, \lambda)$.

## 6 第三边值问题

(6)，(22)式中，令 $\rho=\rho_N$，则有

$$\frac{2}{\rho_N}T(\rho_N,\theta,\lambda) + \frac{\partial}{\partial\rho}T(\rho_N,\theta,\lambda) = -[g(A)-\gamma(B)] = f_2(\rho_N,\theta,\lambda), \tag{50}$$

$$f_2(\rho_0,\theta,\lambda) = \sum f_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda) = \sum\left(\frac{\rho_N}{\rho_0}\right)^{n+2}f_{2,n}(\rho_N,\theta,\lambda) = \sum\left[1+(n+2)\frac{1}{\rho_0}(\rho_N-\rho_0) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\frac{1}{\rho_0^2}(\rho_N-\rho_0)^2+\cdots\right]\cdot f_{2,n}(\rho_N,\theta,\lambda), \tag{51}$$

进一步推导有

$$f_2(\rho_0,\theta,\lambda) = \sum f_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda) = f_2(\rho_N,\theta,\lambda) - \frac{1}{\rho_0}(\rho_N-\rho_0)\rho_N\eta_2(\rho_N,\theta,\lambda) + \frac{1}{2\rho_0}(\rho_N-\rho_0)^2[\rho_N^2\xi_2(\rho_N,\theta,\lambda) + 2\rho_N\eta_2(\rho_N,\theta,\lambda)]. \tag{52}$$

而

$$f_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{f_2(\rho_N,\theta',\lambda') - \frac{1}{\rho_0}(\rho_N-\rho_0)\rho_N\eta^2(\rho_N,\theta',\lambda') + \frac{1}{2\rho_0^2}(\rho_N-\rho_0)^2[\rho_N^2\xi_2(\rho_N,\theta',\lambda') +$$

$$2\rho_N\eta_2(\rho_N,\theta',\lambda')]\}P_n(\cos\psi)\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\lambda'. \tag{53}$$

顾及(26)式有

$$T_n(\rho_0,\theta,\lambda)=-\frac{\rho_0}{n-1}f_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda)$$

则地球表面上及表面外空间点($\rho_N$, $\theta$, $\lambda$)的扰动位

$$T(\rho_R,\theta,\lambda)=\sum\left(\frac{\rho_0}{\rho_R}\right)^{n+1}T_n(\rho_0,\theta,\lambda)=$$
$$\sum-\frac{\rho_0}{n-1}\left(\frac{\rho_0}{\rho_R}\right)^{n+1}f_{2,n}(\rho_0,\theta,\lambda)=$$
$$\frac{-1}{4\pi\rho_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f_2(\rho_0,\theta',\lambda')S(\rho_R,\psi)\cdot$$
$$\rho_0^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\lambda', \tag{54}$$

$$S(\rho_R,\psi)=\sum\frac{2n+1}{n-1}\left(\frac{\rho_0}{\rho_R}\right)^{n+1}P_n(\cos\psi)=$$
$$\sum\left(\frac{\rho_0}{\rho_N}\right)^{n+1}S(\psi). \tag{55}$$

其中，$S(\psi)$即Stokes函数，文献[28]中已给出，从上述的(30)，(36)式，(40)，(47)式和(50)，(54)式可以看出，它们分别以求和与积分形式表示了地面、外空与虚拟球之间扰动位的相互关系，从而解出3类边值问题．只要已知地球表面的$f_2(\rho_N, \theta, \lambda)$，$\eta_2(\rho_N, \theta, \lambda)$(此处略去$\xi_2$)即可．文中有关公式与一般书中符号相反，这是因为(5)，(6)式定义$f(\rho_N, \theta, \lambda)$时反号．

最后，作为一个例子，在略出扰动重力二阶梯度之后，地球表面与虚拟球($\rho_0$)之间第一、第二、第三边值问题的解可分别以下述的(56)，(57)，(58)式表示：

$$[T(\rho,\theta,\lambda)]_{\rho=\rho_0}=\left\{T(\rho,\theta,\lambda)-\frac{1}{\rho_0}\rho(\rho-\rho_0)\frac{\partial}{\partial\rho}T(\rho,\theta,\lambda)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2\rho_0^2}(\rho-\rho_0)^2\left[\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}T(\rho,\theta,\lambda)+2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}T(\rho,\theta,\lambda)\right]\right\}_{\rho=\rho_N}=$$
$$T(\rho_N,\theta,\lambda)-\frac{1}{\rho}(\rho_N-\rho_0)f_1(\rho_N,\theta,\lambda)+$$
$$\frac{1}{2\rho_0^2}(\rho_N-\rho_0)^2[\rho_N^2\eta_1(\rho_N,\theta,\lambda)+2\rho_Nf_1(\rho_N,\theta,\lambda)], \tag{56}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\rho}T(\rho,\theta,\lambda)\right]_{\rho=\rho_0}=$$
$$\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}T(\rho,\theta,\lambda)-\frac{1}{\rho_0}(\rho-\rho_0)\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}T(\rho,\theta,\lambda)\right\}_{\rho=\rho_N}=$$
$$f_1(\rho_N,\theta,\lambda)-\frac{1}{\rho_0}(\rho_N-\rho_0)\rho_N\eta_1(\rho_N,\theta,\lambda), \tag{57}$$

$$\left[\frac{2}{\rho}T(\rho,\theta,\lambda)+\frac{\partial}{\partial\rho}T(\rho,\theta,\lambda)\right]_{\rho=\rho_0}=$$
$$\left\{\left[\frac{2}{\rho}T(\rho,\theta,\lambda)\right]+\frac{\partial}{\partial\rho}T(\rho,\theta,\lambda)-\right.$$
$$\left.\frac{1}{\rho_0}(\rho-\rho_0)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{2}{\rho}T(\rho,\theta,\lambda)+\frac{\partial}{\partial\rho}T(\rho,\theta,\lambda)\right]\right\}_{\rho=\rho_N}=$$
$$f_2(\rho_N,\theta,\lambda)-\frac{1}{\rho_0}(\rho_N-\rho_0)\eta_2(\rho_N,\theta,\lambda), \tag{58}$$

边值 $T(\rho_N, \theta, \lambda)$，$f_1(\rho_N, \theta, \lambda)$，$\eta_1(\rho_N, \theta, \lambda)$，$f_2(\rho_N, \theta, \lambda)$、$\eta_2(\rho_N, \theta, \lambda)$，$\rho_N$都是$\theta$，$\lambda$已知函数．

如果考虑在正常位水准椭球面内作一内球，可使

$$\rho_N=\rho_0+D(\theta)+H(\theta,\lambda)$$

$D(\theta)$为球面与椭球面之间的距离．

## 7 结论与讨论

(1) 鉴于Molodensky问题在数学上有两个主要难点[29]，其一，它本身是一个非线性自由边值问题，使解变得复杂；其二，由于边界面附近场源分布的复杂性，致使边值函数粗糙化(不可能光滑)，乃至呈非正则性，为避免这一不足，将大地测量边值问题变为虚似球域外的边值问题．本文利用所提供的方法可以简明地表示虚拟球面、地球表面及外空重力场之间的关系，由此分别解出大地测量中的第一、第二、第三边值问题．既符合于调和函数的理论，又应了当今地面低空重力及其梯度日益增多的需要[30]，且从地球表面延拓到$\rho_0$球上，比Bjerhammar用Poisson积分法更为方便，当$\rho-\rho_0$值较大时，可以使$\rho_0$的球在地球之外，不管$\rho>\rho_0$或$\rho<\rho_0$都是一一对应和惟一确定的．

(2) 这种延拓方法对于推求近地空间的重力场具有较强的收敛性，且能综合利用扰动位，重力异常和重力垂直梯度的数据，使文献[4]中有关公式由四重积分简化为二重积分．这里提供第一、第

二、第三类大地测量边值问题，实际也是大地测量中超定的一种边值问题解法.

(3) 物理大地测量学理论和实践表明，只有尽可能多地综合利用各类不同观测，数据才能达到精化重力场的目的，文中涉及地面的海洋的航空的卫星的各种观测，其中包括物理量几何量的观测，如何将它们以同一精度和统一的重力场元素组合在一起构成解边值问题中所需的条件，(资料)也仍需进一步研究.

(4) 为使描述边值问题的展开式更为精确，从理论上讲，可以表达式展成更高高阶(例如含有$\frac{1}{\rho_0^3}(\rho_N-\rho_0)^3$)的形式，这要涉及扰动位的三阶导数，如何高精度地获取也是值得探讨的问题.

(5) 从$\rho_0$球转换到椭球时，前人已作了一些研究，如何具体操作仍需进一步讨论.

## 参考文献


1 Stokes G G. On the variation of gravity and the surface of the earth. Trans Camb Phil Soc, 1849, 8: 672

2 Molodensky M S, Eremeyev V F, Yourkina M J. Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth. Works of Central Research Institute of Geodesy, Aerial Photography and Cartogramphy. No 131. Moscrow: Gesdetic Literature Press, 1960

3 Bjerhammar A A. New Theory of Geodetic Gravity. Stockholm: Trans Roy Institute Technology. 1964, 243

4 骆鸣津. 用球函数解重力测量的基本微分方程. 测量与地球物理集刊. 1965, 2: 7—26

5 Krarup T. A Contribution to Mathematical Foundation of Physical Geodesy. Danish Geod Inst, Copenhagen. Publ. 44. 1969

6 许厚泽，朱灼文. 地球重力的虚拟单层密度表示. 中国科学，B辑，1984，6: 575—580

7 Moritz H. Molodensky's theory and GPS. Mittelungen der Geodätischen Institute der Terknischen Universität der Graz. Folge(No) 88. 2000

8 李 斐. 应用GPS/重力数据确定(似)大地水准面. 地球物理学报，2005，48(2): 294—298

9 吴晓平，陆仲连. 卫星重力梯度向下延拓的最佳积分核谱组合解. 测绘学报，1992，21(2): 123—133

10 Petrovskays M S. Recovering the globlal gravitational field from stellite measurements of the full gravity gradient. In: Schawarz K P ed. Geodesy Beyond 2000-The Challenges of the First Decade, 2000, 121: 64—67

11 Gelderen M, Rummel R. The solution of the general geodetic boundary value problem. Journal of Geodesy . 2001, 75: 1—11

12 Martinec Z. Green's function solution to spherical gradiometric boundary-value problems, Journal of Geodesy, 2003, 77: 41—49.

13 骆鸣津，张赤军. 低空重力值的延拓. 地壳形变与地震，2000，20(4): 25—27

14 罗志才，宁津生，晁定波. 卫星重力向下延拓的谱方法. 测绘学报，1997，36 (2): 168—175

15 Rummel R. Spherical Spectral Properties of the Earth's Gravitational Potential and Its First and Second Derivatives, In: Sansò F and Rummel R eds: Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid, Lecture Notes in Earth Sciences. Heidelberg: Springer, 1997, 65: 359—404

16 Li J. A formula for computing the gravity disturbance from the second radial derivative of the disturbing potential, Journal of Geodesy, 2002, 76: 226—231

17 边少锋，晁定波. 超定边值问题的样条解，测绘学报，1992，21(1): 1—12

18 许厚泽，陆仲连. 中国的重力场和大地水准面. 北京：解放军出版社. 1987

19 李建成，陈俊勇，宁津生，等. 地球重力场逼近理论与中国2000似大地水准面. 武汉：武汉大学出版社，2003

20 边少锋，张德涵. 测高重力边值问题的有限元法. 测绘学报，1992，21(4): 272—273

21 于锦海. 卫星测高球谐级数解法. 测绘学院学报，2003，20(1): 7—9

22 王兴涛，夏哲仁，石 盘，等. 航空重力数据向下延拓比较. 地球物理学报，2004，47(6): 1017—1022

23 申文彬，宁津生，晁定波. 边值问题虚拟压缩恢复及其在Bjerhamer理论中的一个应用. 测绘学报，2005，34(1): 14—18

24 邓 波，朱灼文，陆 中. 重力场Dirichiet问题的Poisson积分表示. 武汉大学学报，信息科学版，2004，29(7): 635—637

25 Fei Z L, Sideris N G. A news methed for computing the ellipsoid correction for Stokes's formula. Journal of Geodesy. 2000. 74: 223—231

26 朱灼文. 椭球情况的置换. 中国科学，B辑，1986(3): 328—336

27 Zhang C J. Determination of Vertical gradient of gravity anomaly with topographic data. Chinese Science Bulletin, 1999, 44(11): 1072—1075

28 方 俊. 重力测量与地球形状学(下). 北京：科学出版社，1975

29 管泽霖，管 铮，黄谟涛，等. 局部重力场的逼近理论和方法. 北京：测绘出版社，1997

30 Ditmar P J, Kushe J, Klees R. Computation of spherical harmonic coefficients from gravity gradiometry data to be acquired by the GOCE satellite: Regularizaion issues. Journal of Geodesy, 2003, 77: 465—477